

ВАРИАНТ № 2

Реализация средствами системы МРІ алгоритма решения уравнения теплопроводности

Описание разностной схемы

Простейшее уравнение теплопроводности в области $[0, T] \times [0, L] = \Omega$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(t, x) & ((t, x) \in (0, T] \times (0, L)), \\ y(0, x) = \varphi(x) & (x \in [0, L]) \\ y(t, 0) = \psi_0(t) & (t \in [0, T]), \\ y(t, L) = \psi_1(t) & (t \in [0, T]). \end{cases} \quad (1)$$

Для приближенного решения уравнения (1) производные заменяются на свои разностные аналоги, а область Ω — на сетку (n, j) с шагом τ по переменной t и с шагом h по переменной x . Пусть далее $K = \frac{T}{\tau}$, $M = \frac{L}{h}$. Подмножество узлов сетки вида $\{(n, j) \mid 0 \leq j \leq M\}$ будем называть слоем (по времени) с номером n .

В результате получается следующая разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{u(n+1, j) - u(n, j)}{\tau} = \\ = \frac{u(n, j-1) - 2u(n, j) + u(n, j+1)}{h^2} + F(n, j), \\ u(0, j) = \Phi(j), \\ u(n, 0) = \Psi_0(n), \\ u(n, M) = \Psi_1(n), \\ (n, j) \in \{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, M-1\} = W. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь F , Φ , Ψ_0 , Ψ_1 — сеточные аналоги функций f , φ , ψ_0 , ψ_1 соответственно, т.е., например, $F(n, j) = f(n\tau, jh)$.

Теперь для значения $u(n+1, j)$ можно получить явное выражение:

$$u(n+1, j) = u(n, j) + \tau \left[\frac{u(n, j+1) - 2u(n, j) + u(n, j-1)}{h^2} + F(n, j) \right]. \quad (3)$$

Из (3) видно, что $u(n+1, j)$ зависит непосредственно только от значений $u(n, j)$ и $u(n, j \pm 1)$.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \pi[\pi t^2 \sin(\pi t x) + x \cos(\pi x t)] & ((t, x) \in (0, 1] \times (0, 1)), \\ y(0, x) = 0 & (x \in [0, 1]) \\ y(t, 0) = 0 & (t \in [0, 1]), \\ y(t, 1) = \sin(\pi t) & (t \in [0, 1]). \end{cases} \quad (4)$$

Решением (4) является функция $y(x, t) = \sin(\pi x t)$.

Реализовать средствами системы MPI алгоритма приближенного решения уравнения теплопроводности (4) на N процессорах, объединённых в конвейер (см. рис.), и найти максимальную погрешность вычисления.

Заметим, что исходные данные доступны всем процессам с начала их работы.

Для распараллеливания следует разделить сетку по переменной x на отрезки из M/N узлов. На каждом из отрезков значение функции вычисляется отдельным процессом.

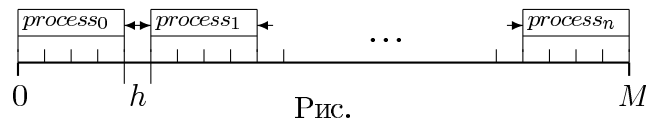


Рис.

Алгоритм действий процесса

1. Вычислить по своему номеру границы отрезка, на котором будут проводиться вычисления. Установить номер текущего слоя n в 0 .
2. По формуле (3) вычислить значения $u(n+1, j)$ на следующем слое по времени (j изменяется внутри своего отрезка сетки по x), обновить значение максимальной ошибки.
3. Если отрезок — не самый левый, то послать соседу слева значение u вычисленное в самой левой точке отрезка.
4. Если отрезок — не самый правый, то послать соседу справа значение u , вычисленное в самой правой точке отрезка.
5. Если следующий слой — не последний, то увеличить номер текущего слоя и перейти к шагу 2,
иначе
перейти к шагу 6.
6. Если номер процесса равен нулю, то получить от всех процессов значение ошибки и выбрать максимальное.